

Międzynarodowa Norma Oceny Niepewności Pomiaru (Guide to Expression of Uncertainty in Measurements-Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna ISO)

RACHUNEK NIEPEWNOŚCI POMIARU

<http://physics.nist.gov/Uncertainty>

Wyrażanie Niepewności Pomiaru. Przewodnik. Warszawa, Główny Urząd Miar 1999

H. Szydłowski, Pracownia fizyczna, PWN Warszawa 1999

A.Zięba, Postępy Fizyki, tom 52, zeszyt 5, 2001, str.238-247

A.Zięba, Pracownia Fizyczna WFiTJ, Skrypt Uczelniany SU 1642, Kraków 2002

POMIAR

Pomiary w laboratorium można podzielić na pomiary wielkości:

- ❑ prostych
- ❑ złożonych

Przykład 1: Pomiar długości nici przymiarem metrowym, pomiar okresu drgań wahadła – pomiary wielkości prostych – pomiary bezpośrednie

Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego na podstawie wzoru

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

- pomiar wielkości złożonej

W trakcie pomiaru uzyskujemy wartości różniące się od przewidywań teorii. Źródłem rozbieżności między teorią i eksperymentem są niedoskonałości:

- osoby wykonującej pomiar,
- przrządów pomiarowych,
- obiektów mierzonych

Gdy doświadczenie staje się doskonalsze, rozbieżności te maleją. Maleje **błąd** pomiaru, **niepewność** pomiaru.

Wynik pomiaru jest zawsze obarczony błędem i po przeprowadzeniu odpowiedniej analizy błędów podajemy go w jednej z następujących postaci:

$$F = (98 \pm 3) \cdot 10^3 \text{ C}$$

$$g = 9,866(28) \text{ m/s}^2$$

Przykład 2: Załóżmy, że przy wyznaczaniu równoważnika elektrochemicznego pewnego pierwiastka uzyskaliśmy następujące liczby:

$$k = 0,0010963 \quad \text{g/C}$$

$$\Delta k = 0,0000347 \quad \text{g/C}$$

Jak podać wynik?

cyfry znaczące

cyfry nieznaczące

Odp. $k = (0,00110 \pm 0,00004) \text{ g/C}$ lub $k = 0,00110(4) \text{ g/C}$

Niepewność a błąd pomiaru

Błąd bezwzględny pojedynczego

pomiaru:

$$\Delta x_i = x_i - x_0$$

x_i – wartość zmierzona, x_0 – wartość rzeczywista

Błąd względny:
$$\delta = \frac{\Delta x_i}{x_0}$$

Uwaga: wartości rzeczywiście wielkości mierzonej zazwyczaj nie są znane

Niepewność u (ang. *uncertainty*) posiada wymiar, taki sam jak wielkość mierzona

Symbolika: u lub $u(x)$ lub $u(\text{stężenie NaCl})$

Niepewność względna $u_r(x)$ to stosunek niepewności (bezwzględnej) do wielkości mierzonej:

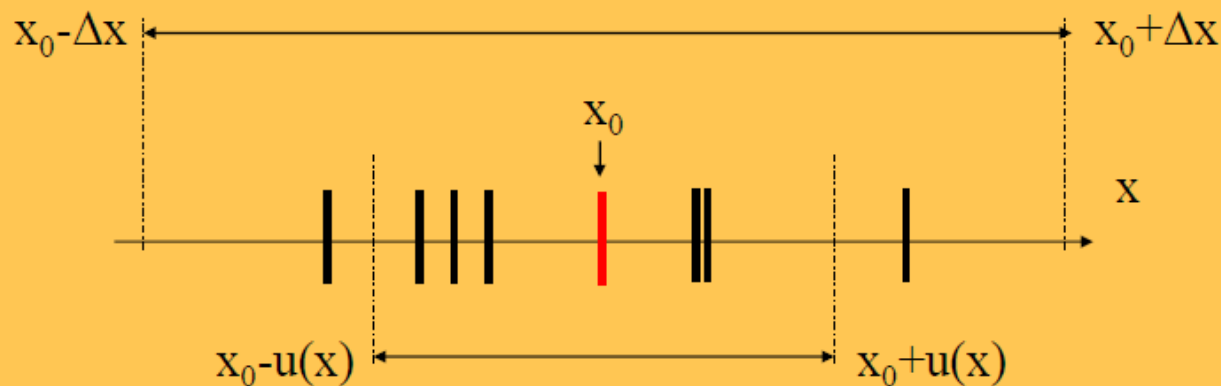
$$u_r(x) = \frac{u(x)}{x}$$

Niepewność względna jest wielkością bezwymiarową i może być wyrażona w %

Niepewność

Istnieją dwie miary niepewności pomiaru:

- niepewność standardowa $u(x)$
- niepewność maksymalna Δx



Niepewność maksymalna

W tym przypadku staramy się określić przedział

$$x_0 - \Delta x < x_i < x_0 + \Delta x$$

w którym mieszczą się wszystkie wyniki pomiaru x_i , aktualnie wykonane i przyszłe.

Jest miarą deterministyczną, gdyż zakłada, że można określić przedział wielkości mierzonej x , w którym na pewno znajdzie się wielkość rzeczywista.

Zaleca się obecnie niepewność maksymalną specyfikowaną przez producenta zamieniać na niepewność standardową wg wzoru:

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$$

Podział błędów

Wyniki pomiarów podlegają pewnym prawidłowościom, tzw. rozkładom typowym dla zmiennej losowej. Z tego względu błędy dzielimy na:

- **Błędy grube** (pomyłki), które należy eliminować
- **Błędy systematyczne**, które można ograniczyć udoskonalając pomiar
- **Błędy przypadkowe**, które podlegają prawom statystyki i rachunku prawdopodobieństwa, wynikają z wielu losowych przyczynków i nie dają się wyeliminować

Błędy grube: Są wynikiem pomyłki eksperymentatora np. przy odczytywaniu wartości mierzonych, przy przeliczaniu jednostek etc., nieprawidłowego stosowania przyrządu pomiarowego, poważnego i nieuświadomionego uszkodzenia przyrządu pomiarowego, zastosowania nieodpowiedniej metody pomiaru lub niewłaściwych wzorów teoretycznych do opracowania wyników. Fakt zaistnienia błędu grubego należy sobie jak najszybciej uświadomić a wynik obarczony takim błędem wykluczyć z dalszych analiz. Jeśli to możliwe, pomiar powtórzyć.

Błędy systematyczne zawsze w ten sam sposób wpływają na wyniki pomiarów wykonanych za pomocą tej samej metody i aparatury pomiarowej. Minimalna wartość błędu systematycznego jest określona dokładnością stosowanego przyrządu (lub klasą w przypadku analogowych mierników elektrycznych). Wprowadza się pojęcie działki elementarnej czyli wartość najmniejszej działki (odległość między sąsiednimi kreskami na skali przyrządu lub ułamek tej odległości określony klasą przyrządu), która określa dokładność odczytu.

Źródłem błędu systematycznego są: skale mierników (np. niewłaściwe ustawienie „zera”), nieuświadomiony wpływ czynników zewnętrznych (temperatura, wilgotność) na wartość wielkości mierzonej, niewłaściwy sposób odczytu (błąd paralaksy) lub pomiaru, przybliżony charakter wzorów stosowanych do wyznaczenia wielkości złożonej.

Błędy systematyczne czasami można ograniczyć wprowadzając poprawki, np.

$$F = 6\pi\eta v(1 + 2,4 \frac{r}{R})$$

Błędy przypadkowe: występują zawsze w eksperymencie, lecz ujawniają się gdy wielokrotnie dokonujemy pomiaru przyrządem, którego dokładność jest bardzo duża a błędy systematyczne wynikające z innych przyczyn są bardzo małe. Wynikają one z własności obiektu mierzonego (np. wahania średnicy drutu na całej jego długości), własności przyrządu pomiarowego (np. wskazania przyrządu zależą od przypadkowych drgań budynku, fluktuacji ciśnienia czy temperatury, docisku dla suwmiarki), lub mają podłoże fizjologiczne (refleks eksperymentatora, subiektywność oceny maksimum natężenia dźwięku czy równomierności oświetlenia poszczególnych części pola widzenia)

Błędy przypadkowe zawsze towarzyszą eksperymentowi, nawet jeśli inne błędy zostaną wyeliminowane. W przeciwieństwie do błędu systematycznego, ich wpływ na wynik ostateczny pomiaru można ściśle określić.

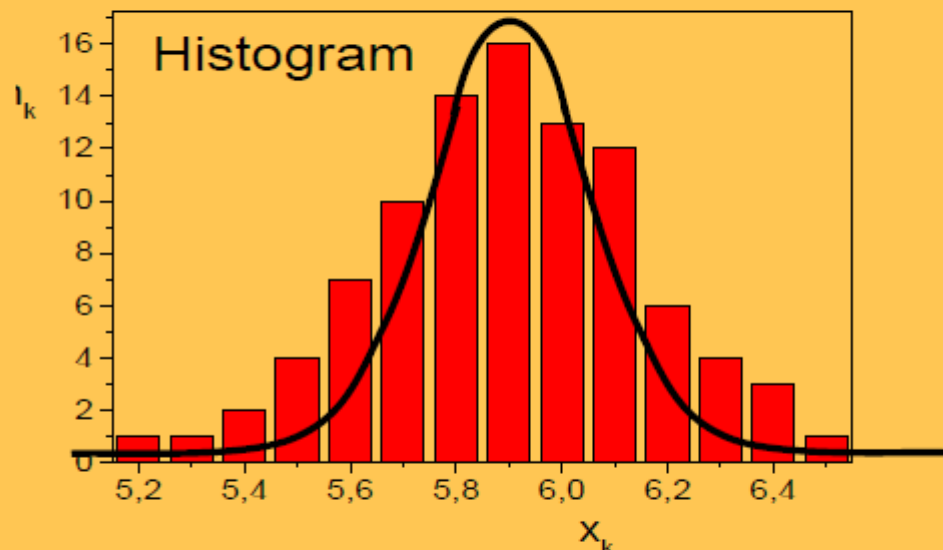
Opracowanie serii pomiarów bezpośrednich dużej próby

Średnia
arytmetyczna

$$\bar{x}=5,9$$

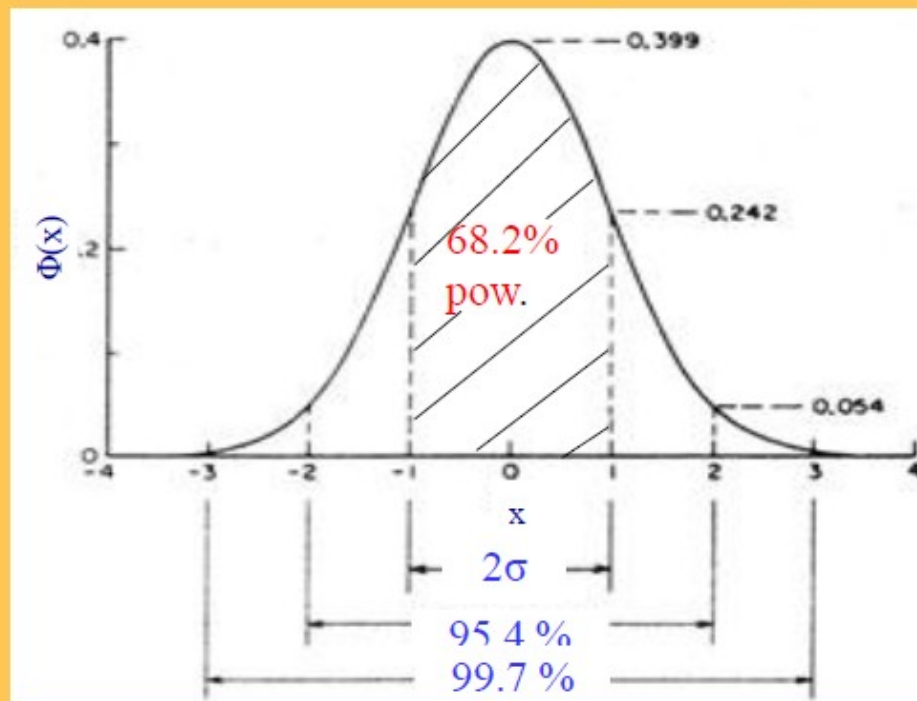
Odchylenie
standardowe

$$\sigma=0,2$$



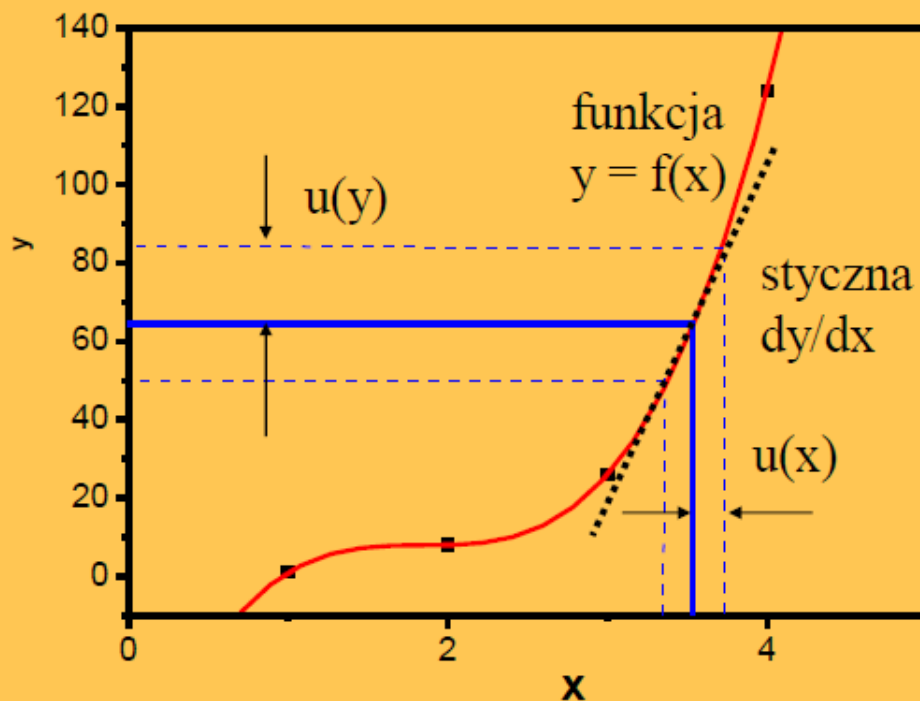
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{n}{n-1} (\overline{x^2} - (\bar{x})^2)}$$

Rozkład normalny Gaussa



W przedziale $x_0 - \sigma < x < x_0 + \sigma$ zawiera się 68.2 % (2/3),
w przedziale $x_0 - 2\sigma < x < x_0 + 2\sigma$ zawiera się 95.4 %
w przedziale $x_0 - 3\sigma < x < x_0 + 3\sigma$ zawiera się 99.7 %
wszystkich wyników

NIEPEWNOŚĆ WIELKOŚCI ZŁOŻONEJ – PRAWO PRZENOSZENIA BŁĘDU



$$u(y) = \frac{dy}{dx} u(x)$$

Metoda różniczki zupełnej

Dla wielkości złożonej $y=f(x_1,x_2,...x_n)$ gdy niepewności maksymalne $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots \Delta x_n$ są małe w porównaniu z wartościami zmiennych $x_1, x_2, \dots x_n$ niepewność maksymalną wielkości y wyliczamy z praw rachunku różniczkowego:

$$\Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| |\Delta x_1| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| |\Delta x_2| + \dots + \left| \frac{\partial y}{\partial x_n} \right| |\Delta x_n|$$

Prawo przenoszenia niepewności

Niepewność standardowa wielkości złożonej $y=f(x_1,x_2,...x_n)$ obliczamy z tzw. prawa przenoszenia niepewności jako sumę geometryczną różniczek cząstkowych

$$u_c(y) = \sqrt{\left[\frac{\partial y}{\partial x_1} u(x_1)\right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial x_2} u(x_2)\right]^2 + \dots + \left[\frac{\partial y}{\partial x_n} u(x_n)\right]^2}$$

$$u_{cr}(y) = \frac{u_c(y)}{y}$$

Z pomiarów U i I wyliczamy $R = U / I$

Niepewności maksymalna oporu (wg. wzoru 3)

$$\Delta R = \left| \frac{\partial R}{\partial U} \right| |\Delta U| + \left| \frac{\partial R}{\partial I} \right| |\Delta I|$$

$$\frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I}$$

$$\frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{U}{I^2}$$

niepewność bezwzględna

$$\Delta R = \frac{1}{I} \Delta U + \frac{U}{I^2} \Delta I$$

niepewność względna

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}$$

Na wartości ΔU i ΔI mają wpływ dokładności przyrządów.

Dla **mierników analogowych** korzystamy z klasy
dokładności przyrządu

$$\Delta U = \frac{\textit{klasa} \cdot \textit{zakres}}{100}$$

Dla **mierników cyfrowych** niepewność jest
najczęściej podawana w instrukcji obsługi jako
zależna od wielkości mierzonej x i zakresu
pomiarowego z

$$\Delta x = c_1 x + c_2 z$$

np. multimetr $c_1=0.2\%$, $c_2=0.1\%$

przy pomiarze oporu $R=10\text{ k}\Omega$ na zakresie $z = 20\text{ k}\Omega$ da
niepewność $\Delta R=0.04\text{ k}\Omega$, tj. równowartość 4 działek
elementarnych

Dawniej uważano, że miarą błędu systematycznego może być tylko niepewność maksymalna. Nowa Norma traktuje błąd systematyczny jako zjawisko przypadkowe, gdyż nie znamy *a priori* jego wielkości i znaku. Norma zaleca stosowanie niepewności standardowej u .

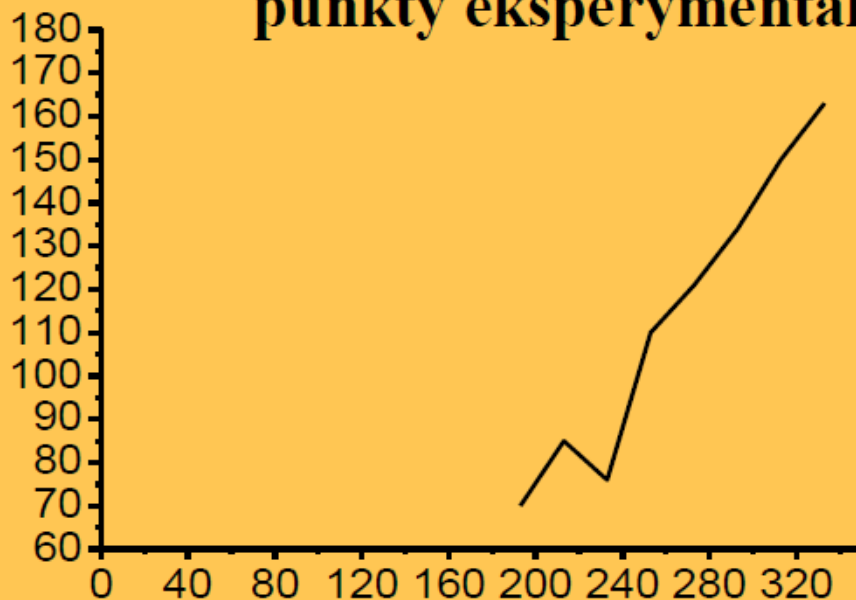
A zatem dla przykładu omawianego:

$$u(R) = \frac{\Delta R}{\sqrt{3}}$$

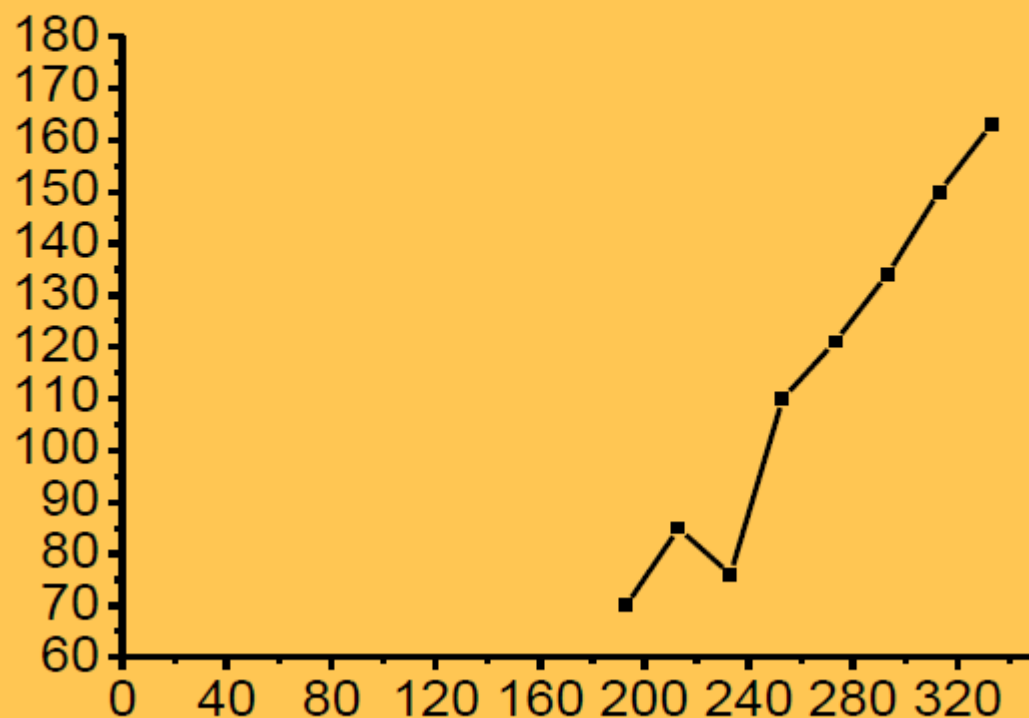
Zasady rysowania wykresów

Czy ten wykres jest narysowany zgodnie z zasadami?

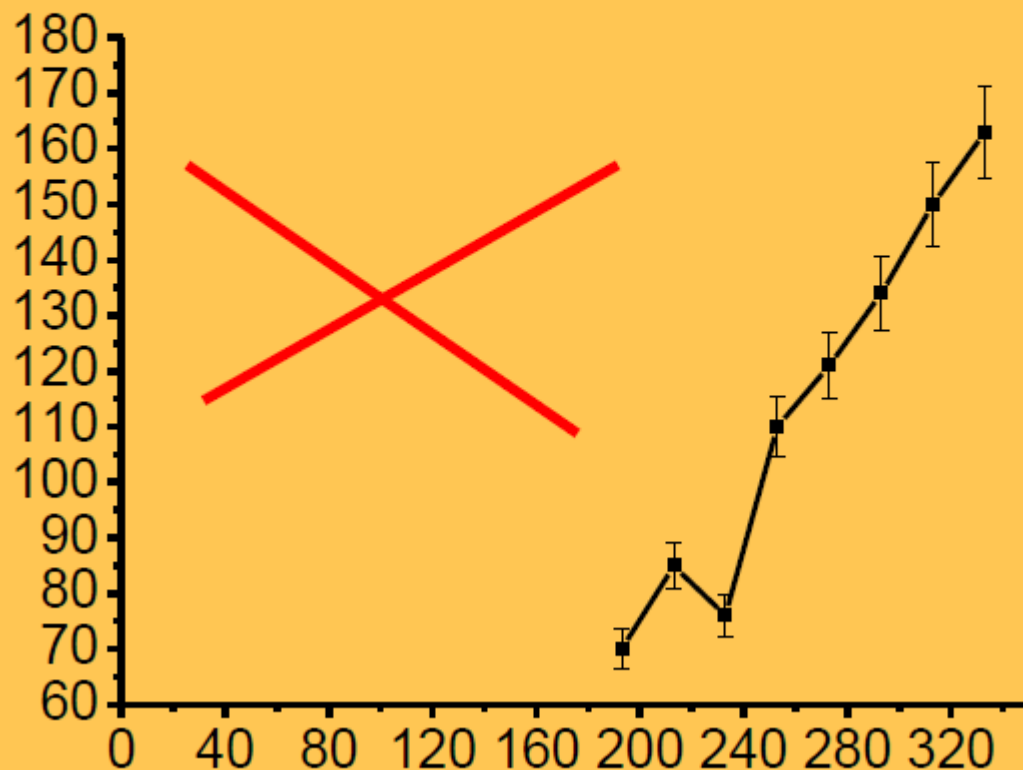
1. Należy wyraźnie zaznaczyć punkty eksperymentalne !!!



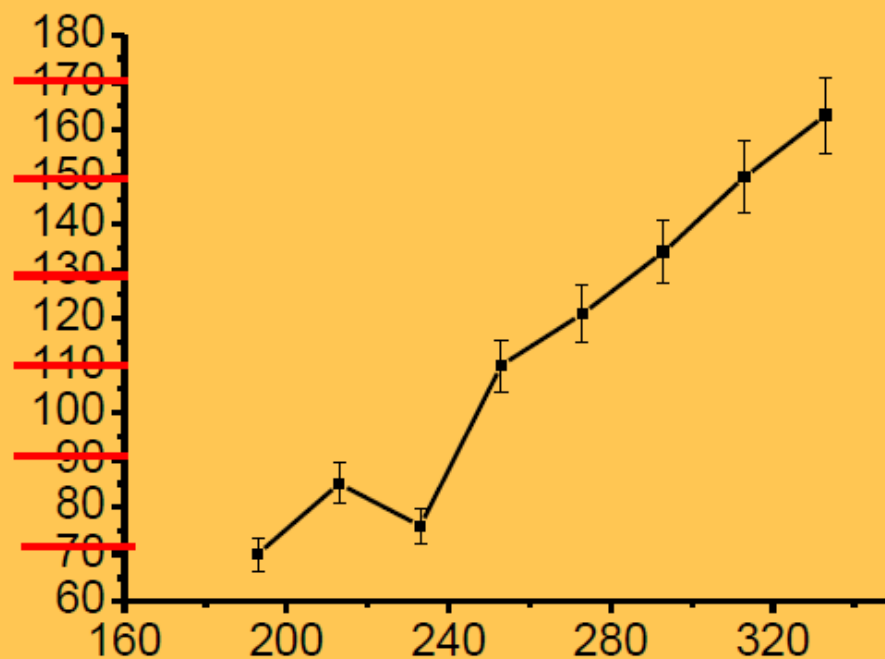
2. Trzeba nanieść błąd pomiaru



3. Dobrać zakresy osi współrzędnych odpowiednio do zakresu zmienności danych pomiarowych !!!

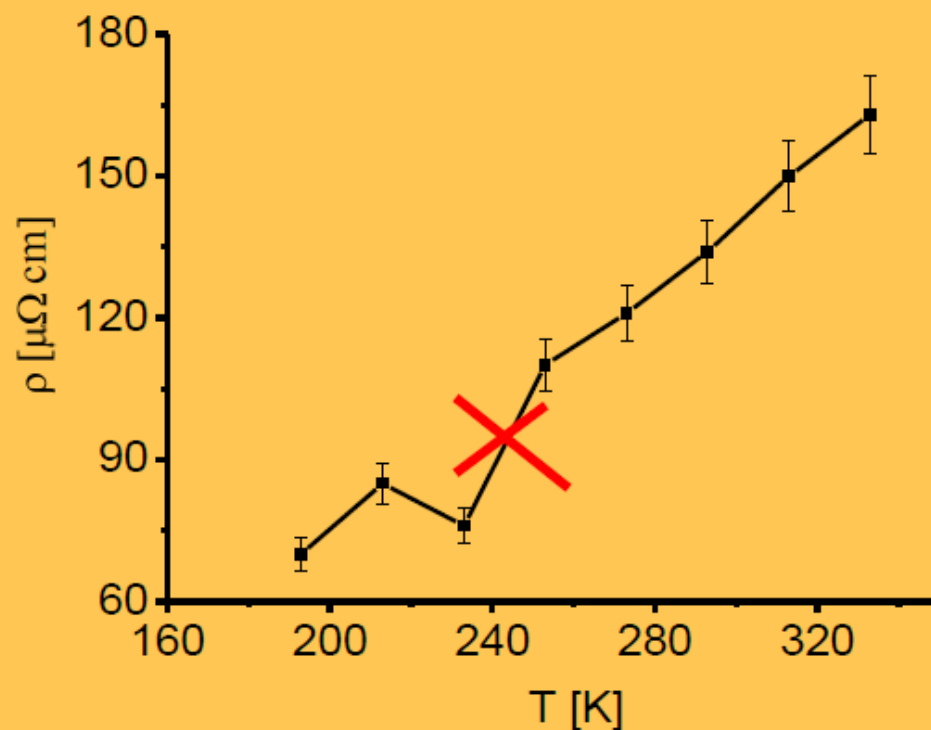


4. Właściwie opisać osie współrzędnych i dobrać skalę, tak aby łatwo można było odczytać wartości zmierzone.



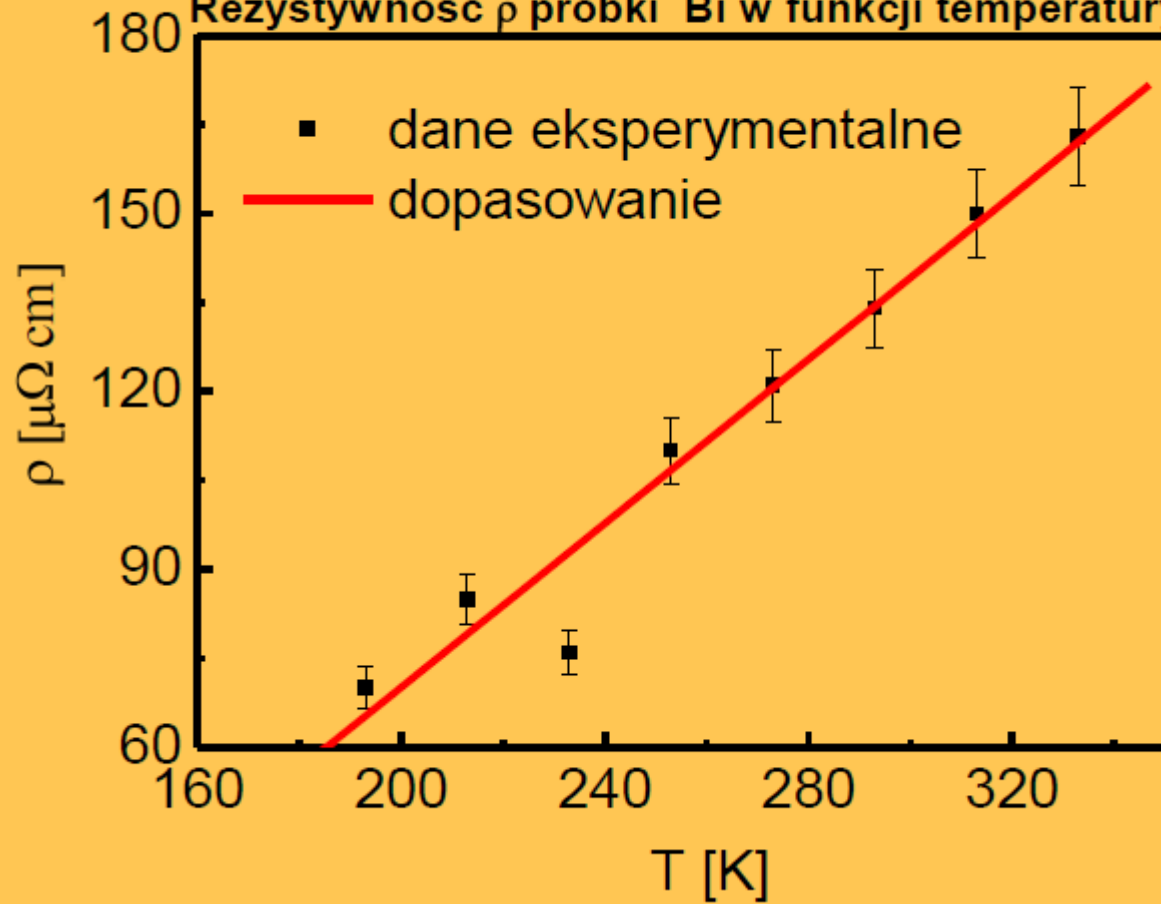
co jest na osiach ???

5. Nie łączyć punktów eksperymentalnych linią łamaną!!! Jeśli znany jest przebieg teoretyczny to dokonać dopasowania teorii do doświadczenia (przeprowadzić fitowanie)

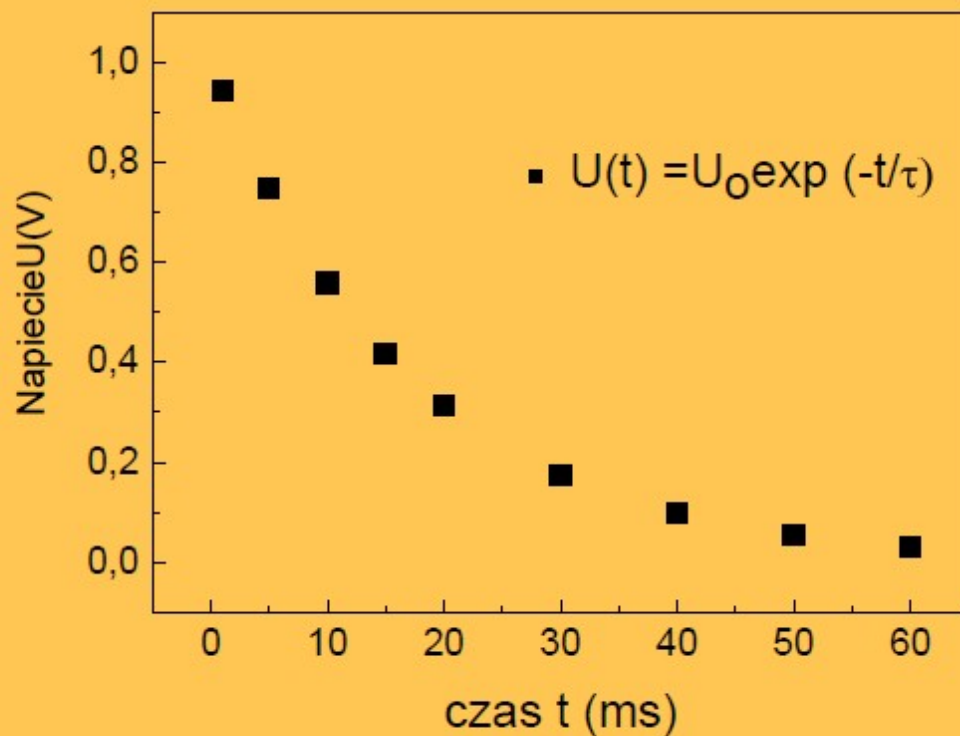


Wykres 1

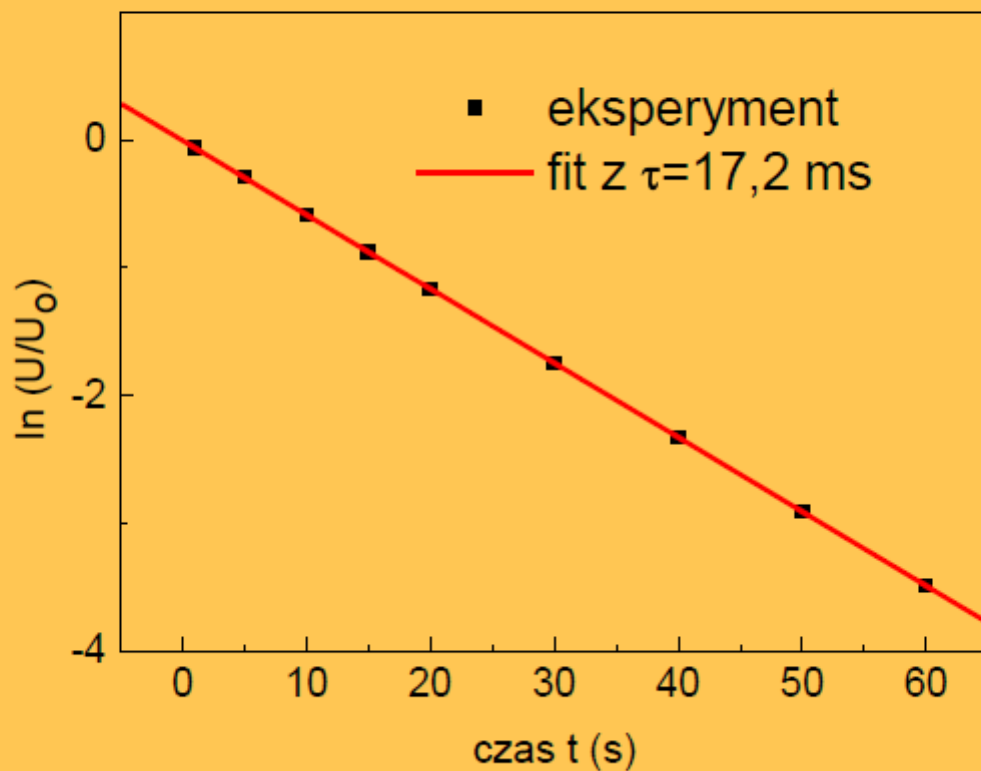
Rezystywnosc ρ próbki Bi w funkcji temperatury T



Linearyzacja danych eksperymentalnych



Dopasowanie prostej wykonujemy po przekształceniu danych do postaci $\ln(U/U_0) = -t/\tau$



Następnie należy użyć klasycznej metody najmniejszych kwadratów

$$\min \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$\min \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

PODSUMOWANIE

- Każdy pomiar w laboratorium jest obarczony niepewnością pomiarową, którą eksperymentator musi określić zgodnie z pewnymi zasadami.
- W pierwszej kolejności należy przeanalizować źródła błędów, pamiętając, aby wyeliminować wyniki obciążone błędem grubym. W laboratorium studenckim błędy systematyczne z reguły przewyższają błędy przypadkowe.
- Wielokrotne powtarzanie pomiarów, gdy dominuje błąd systematyczny, nie ma sensu. W takim przypadku dokonujemy tylko 3-5 pomiarów w tych samych warunkach w celu sprawdzenia powtarzalności.

- Gdy błąd przypadkowy dominuje w eksperymencie, należy sprawdzić czy rozkład wyników może być opisany funkcją Gaussa czy też należy spodziewać się innego rozkładu. W tym celu dokonujemy wielokrotnego (np. 100 razy) pomiaru w tych samych warunkach, obliczamy średnią i wariancję rozkładu, rysujemy histogram, etc.)
- Jako miarę niepewności stosujemy raczej niepewność standardową, rzadziej niepewność maksymalną.
- W przypadku wielkości złożonej, stosujemy prawo przenoszenia błędów. Staramy się przeprowadzić analizę niepewności wielkości złożonej tak, aby uzyskać informacje dotyczące wagi przyczynków, jakie wnoszą do całkowitej niepewności pomiary poszczególnych wielkości prostych. W tym celu należy analizować niepewności względne.

- Ważnym elementem sprawozdania z przebiegu eksperymentu (i to nie tylko w laboratorium studenckim) jest wykres. Wykresy sporządzamy zgodnie z dobrymi zasadami, pamiętając o jednoznacznym opisie.
- Jeżeli znane są podstawy teoretyczne badanego zjawiska, na wykresie zamieszczamy krzywą teoretyczną (linia ciągła) na tle wyraźnych punktów eksperymentalnych (dobieramy odpowiednie symbole i nanosimy niepewności eksperymentalne). Możemy wcześniej dokonać dopasowania parametrów przebiegu teoretycznego w oparciu o znane metody „fitowania”
- Zawsze, gdy to możliwe, dokonujemy linearyzacji danych eksperymentalnych, np. rysując y vs. $\ln(x)$, lub $\log y$ vs. $\log x$, lub y vs. $1/x$ itp. Do tak przygotowanych danych można zastosować metodę regresji liniowej

KONIEC